Universidade Federal de São João del Rei
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT

Marcelo Ribeiro Goulart

A GEOMETRIA DAS ÓRBITAS DE UM COMETA

São João del Rei - MG
Dezembro de 2019

Marcelo Ribeiro Goulart

A GEOMETRIA DAS ÓRBITAS DE UM COMETA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr Ronaldo Ribeiro Alves

São João del Rei, 11 de Dezembro de 2019.

Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Alves

Prof. Me. Carlos Alberto da Silva Junior

Prof. Dr. Wilker Thiago Resende Fernandes

Dedico este trabalho à minha mãe, Lourdes. Sua vida foi marcada por cometas: Nasceu as vésperas da passagem do Cometa Seki-Lines (1962), conheceu meu pai quando o cometa West surgiu (1976), viu a passagem do cometa Halley com minha irmã nos braços (1985) e o Hale-Bopp comigo (1996). Agora que se tornou uma estrela está ainda mais próxima de tais astros.

Agradecimentos

Chega a ser estranho o final dessa jornada. Quatro anos se passaram pautados em lutas, choros, alegrias e agora finalmente estamos prontos para galgar mais esse degrau. Agradeço primeiramente a Deus pela inspiração necessária em muitos momentos de frustração e desespero.

Aos meus pais, Júlio e Lourdes, verdadeiros anjos em minha vida, que me ajudaram profundamente na parte motivacional, financeira e sobretudo emocional, e a minha irmã, Tatiana, pelos puxões de orelha que sempre me trouxeram de volta à realidade quando eu me perdia no caminho. Obrigado por nunca me deixarem desistir!

Agradeço ao meu primo e orientador, Ronaldo, e sua esposa, Irene, pelo meu acolhimento e cuidado em toda essa etapa. Certamente seria muito difícil a estadia sem a sagacidade do primeiro e os aconselhamentos da segunda.

Agradeço também aos membros que compõe a minha banca, Carlos e Wilker por aceitarem o meu pedido. O primeiro por ser meu mentor durante praticamente todo o curso, sempre disposto a me ajudar, aconselhar e acreditar em mim, mesmo quando eu não correspondia. Tenho você como um pai, por mais que isso talvez te faça sentir “um velhinho”, como costuma dizer. Quanto ao segundo, com toda certeza, uma figura definitiva para me ensinar a ser um matemático melhor, um professor melhor e sobretudo, uma pessoa melhor.

Mais do que apenas números e teoremas, o curso também me proporcionou, entre colegas, professores e funcionários, a companhia de pessoas marcantes nesse trajeto como Paloma, Elton e Pedro, meus “irmãos de outra turma”, aqueles que me trouxeram uma paz intransponível, uma realização máxima. Isabela e Matheus, amigos que tanto me ajudaram em meus problemas, sempre estando ali por mim. Patrícia, Viviane e Francinildo, modelos de professores inspiradores e Cida, por ser o suporte em muitas horas, tanto de felicidade, quanto tristeza. Muitos outros tiveram parte nessa história e a todos vocês, meu muito obrigado!

Por fim, agradeço uma pessoa que tem sido fundamental nesse arremate: Minha namorada, Lorena. Minha confidente e portadora das minhas lágrimas e sorrisos, não teria conseguido sem você. Meus mais sinceros agradecimentos.

A liberdade não tem preço, a mera possibilidade de obtê-la já vale a pena.
Isaac Asimov

Resumo

Catástrofe. Por muitos e muitos anos foi a palavra que mais se relacionava aos cometas. Até mesmo hoje em dia há quem acredite que eles possam ser portadores de algum mal. Foi graças ao trabalho de inúmeros cientistas ao longo da história que suas definições foram sendo pouco a pouco construídas e sua imagem iluminada perante à sociedade.

Nesse trabalho mostraremos a história dos cometas e o quão aterrorizante eram para as pessoas no passado, além de elucidar o pensamento dos protagonistas de suas descobertas, como Regiomontano, Kepler, Newton e Halley. Modelaremos de forma simples a órbita do cometa mais famoso de todos e analisaremos a sua localização.

Palavras Chave: Astronomia, Cometas, Modelagem Matemática, Geometria.

Abstract

Catastrophe. For many years it was the word that most related to comets. Even today there are those who believe that they may carry some evil. It was thanks to the work of countless scientific throughout history that these definitions were little by little constructed and their image illuminated by society.

In this work, we will show the history of comets and how terrifying they were to people in the past, besides to elucidating the thought of the protagonists of their findings, such Regiomontano, Kepler, Newton and Halley. We will model the orbit of the most famous comet and analyze its location.

Keywords: Astronomy, Comets, Mathematical Modeling, Geometry.

Lista de Figuras

Sumário

1 Nosso Endereço no Universo

Desde épocas remotas, o céu sempre foi admirado e encarado com beleza, respeito e até mesmo receio. [9] diz que "as especulações sobre a natureza do Universo devem remontar aos tempos pré-históricos e é por isso que a astronomia é frequentemente considerada a mais antiga das ciências". Ele também pontua que "os registros astronômicos mais antigos datam de aproximadamente 3000 a.C".

A busca de padrões levou a humanidade à observações mais profundas do céu noturno, nomeando constelações, estabelecendo calendários e tentando entender quais eram os objetos que nos cercavam. Mas afinal quais são eles e onde estamos?

1.1 O Sistema Solar

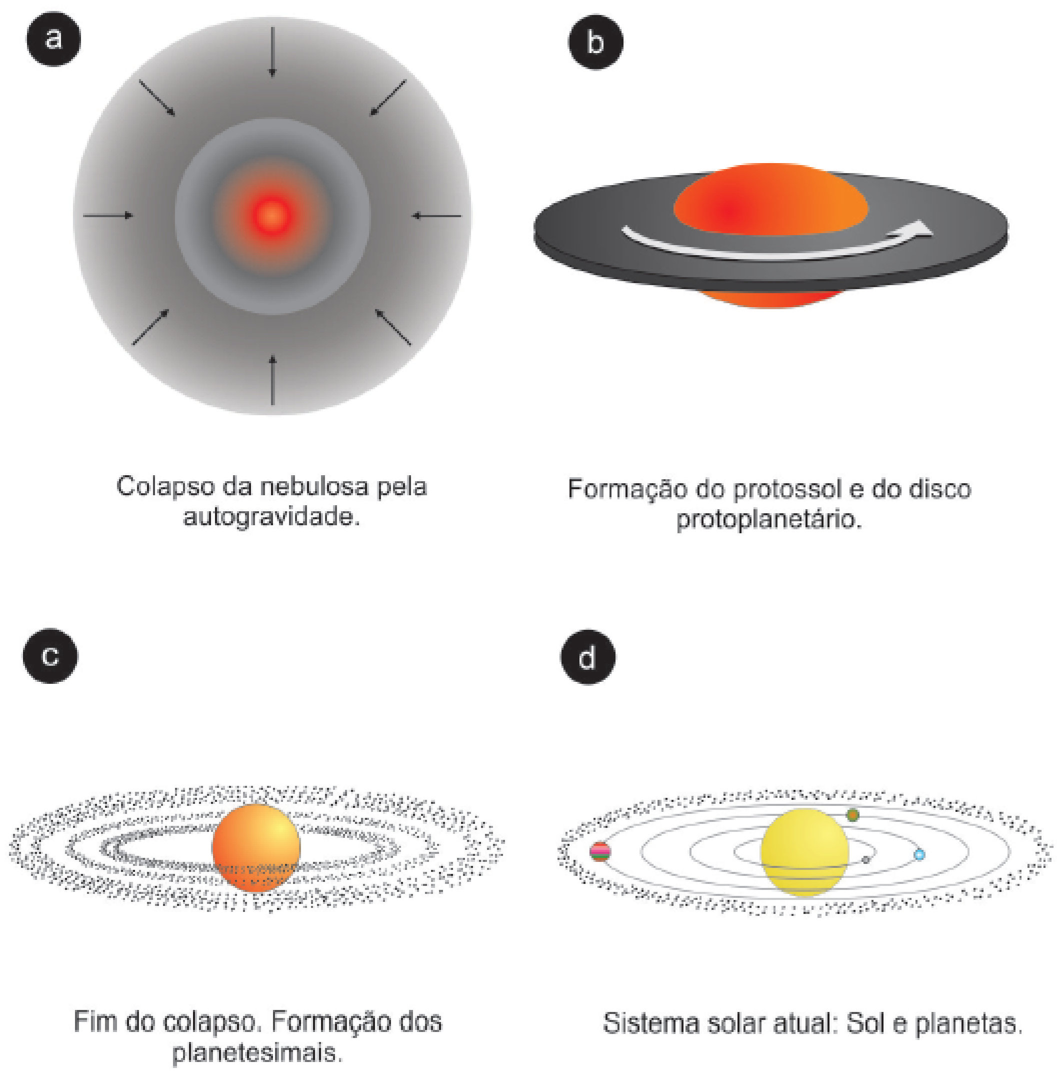
A hipótese mais aceita para a gênese do nosso sistema solar é a **Hipótese Nebular**, sugerida em 1755 pelo filósofo alemão Immanuel Kant (1724-1804), desenvolvida em 1796 pelo matemático francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) e atualizada em 1945 pelo físico e filósofo alemão Carl Friedrich von Weizsäcker (1912-2007) [14].

Kant sugeria nessa hipótese que uma nuvem de gás interestelar, giratória e de proporções gigantescas, chamada nebulosa solar, colapsara e dera origem ao sistema solar com tudo que este possui: O Sol, os planetas, as luas e os corpos menores, como cometas e asteroides. De acordo com [9], a hipótese de Kant, reforçada pelos cálculos de Laplace ocorreria da seguinte maneira:

1. A nebulosa seria contraída pela força de atração gravitacional gerada pelo aumento da massa em sua região central. Esta contração aumentaria a velocidade de rotação;
2. A seguir ela seria achatada até à forma de disco, com uma massa densa e luminosa de gás em posição central, o *proto-sol*, correspondente a cerca de 99% da massa da nebulosa;
3. Haveria um resfriamento do disco nebular em torno do proto-sol, e com isso uma condensação dos materiais da nebulosa em grãos sólidos. As regiões situadas na periferia esfriariam mais rapidamente que as próximas da estrela em formação. Uma vez que a cada temperatura corresponde a condensação de um tipo de material com determinada composição química, teria ocorrido uma separação mineralógica de acordo com a distância ao Sol;
4. Em cada uma das zonas do disco assim formadas, a força da gravidade provocaria a aglutinação de poeiras, que formariam pequenos corpos chamados *planetesimais*,

com diâmetro de cerca de 100 metros. Os maiores desses corpos atraíram os menores, verificando-se a colisão e o aumento progressivo das dimensões dos planetesimais. Todo este processo, denominado acreção, conduziria à formação de corpos de maiores dimensões, os protoplanetas e posteriormente, aos planetas e as luas.

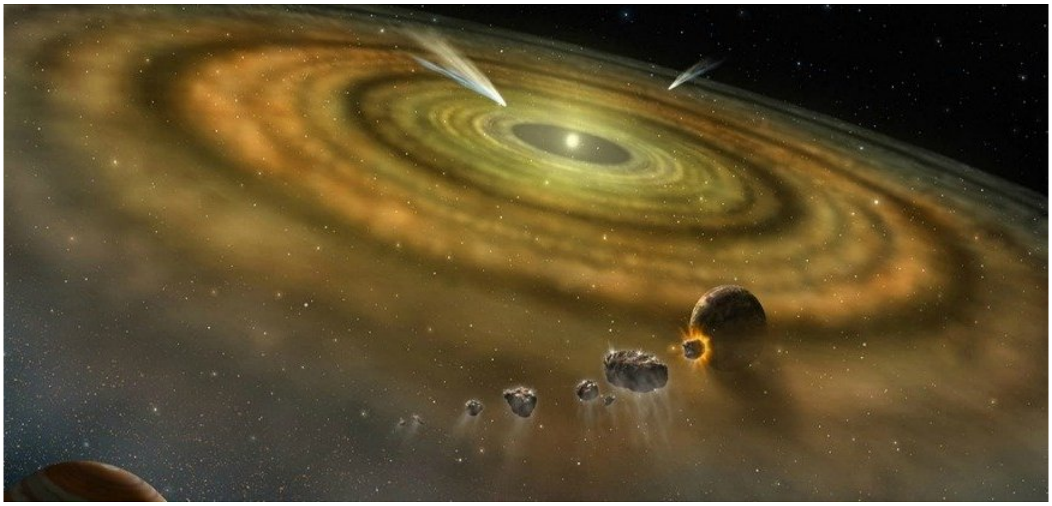
Figura 1: Etapas de Formação do Sistema Solar.



Fonte: [9]

Em seu artigo de 1945, [14] discute que a atual composição do sol e os corpos menores pode trazer várias respostas ao início do sistema solar, uma vez que estas se mantêm bem similares à da nebulosa original.

Figura 2: Representação Artística da Hipótese Nebular.



Fonte: [2]

1.2 Corpos Menores

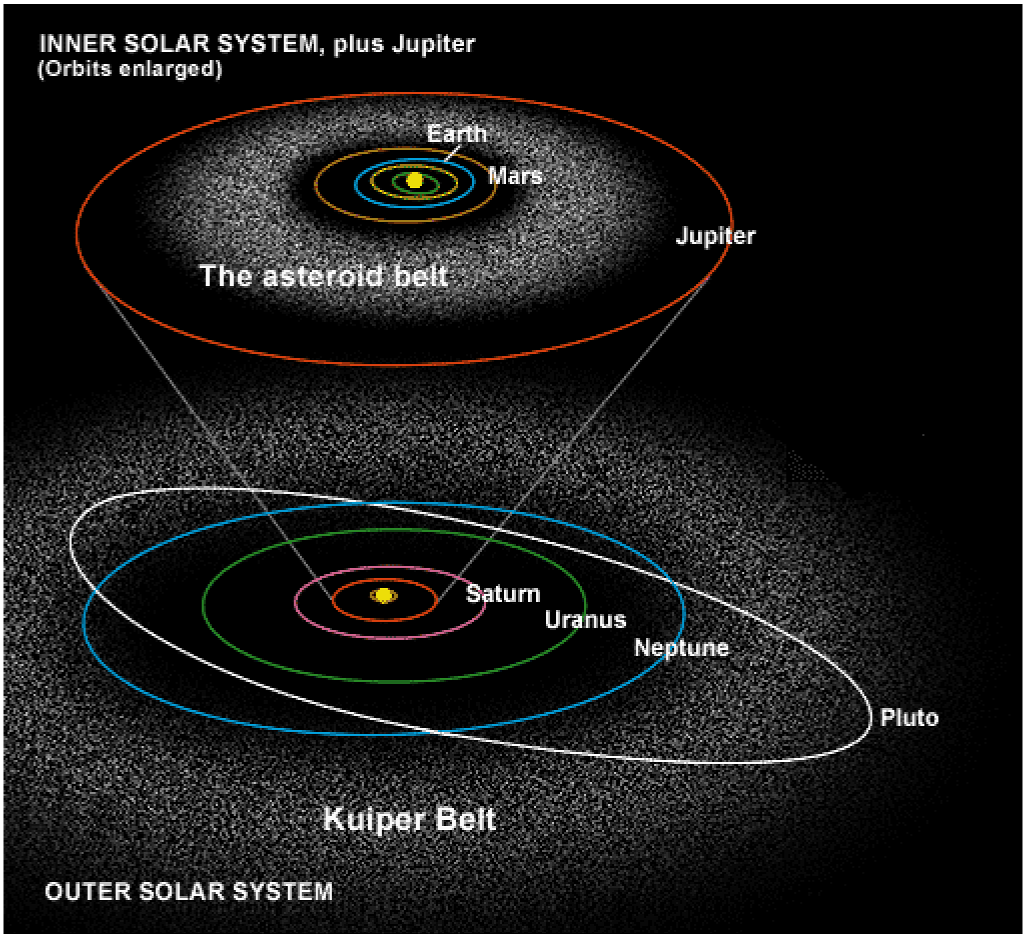
Obviamente a Hipótese Nebular não explicaria somente a formação do sol, dos planetas e das luas. Conhecemos muitos outros corpos celestes importantes durante a história, como os asteroides, os meteoros, os meteoritos e os cometas. Dado a beleza do último e o fato deste ser o objetivo do trabalho, a definição dele será colocada no próximo capítulo.

1.2.1 Asteroides

Em [9], os autores afirmaram que os

> Asteroides são um grupo numeroso de pequenos corpos que orbitam o Sol. A maior parte dos asteroides conhecidos tem órbitas situadas entre as órbitas de Marte e Júpiter, a uma distância da ordem de 2,8 unidades astronômicas (UA) do Sol. Essa região é conhecida como o Cinturão de Asteroides. A partir de 1992 foram descobertos vários asteroides situados além da órbita de Netuno, chamados objetos transnetunianos. Esses objetos formam o chamado Cinturão de Kuiper, um cinturão de restos gelados que está no plano do sistema solar e se estende desde após a orbita de Netuno até 150 UA do Sol. [...] Todos os asteroides, sejam do cinturão principal, sejam do cinturão de Kuiper, são menores do que a Lua (p.147).

Figura 3: O Cinturão de Asteroides e o Cinturão de Kuiper.



Fonte: [11]

1.2.2 Meteoros e Meteoritos

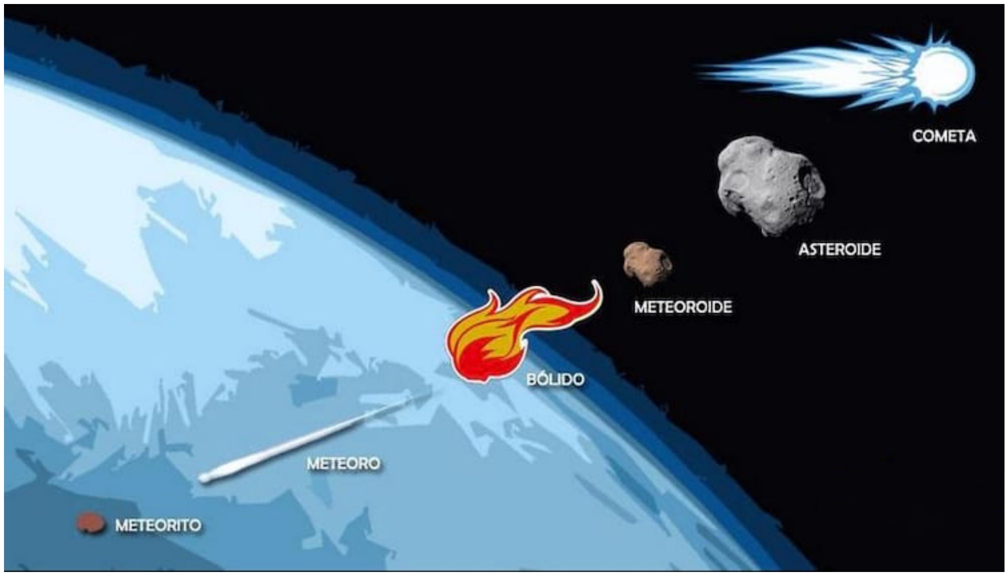
Já o Meteoro:

> é um fenômeno luminoso quando um pequeno asteroide, chamado meteoroide, se choca com a atmosfera da Terra. O termo vem do grego meteoron, que significa fenômeno no céu. Ao penetrar na atmosfera da Terra, gera calor por atrito com a atmosfera, deixando um rastro brilhante facilmente visível a olho nu [9].

O bólido seria um meteoro extremamente brilhante que fundamentalmente explode na atmosfera. Quanto aos meteoritos, eles são os meteoros que atravessam a atmosfera da Terra sem serem completamente vaporizados, caindo ao solo. "Do estudo dos meteoritos se pode aprender muito sobre o tipo de material a partir do qual se formaram os planetas interiores, uma vez que são fragmentos primitivos do sistema solar"[9].

Uma representação esquemática acerca dessas diferenças entre os corpos menores pode ser melhor observada a seguir:

Figura 4: Diferenças entre os Corpos Menores.



Fonte: [8]

.

2 Cometas: Um espetáculo itinerante

Os cometas suscitaram a curiosidade de muitos estudiosos desde a antiguidade. Aristóteles buscava entender melhor do que se tratava aquele belo espetáculo no céu. Este considerava os cometas como simples fenômenos atmosféricos, resultado da emanação de gases terrestres com faíscas das esferas celestes superiores. Infelizmente este pensamento perdurou por milênios e trouxe consigo o medo.

A humanidade sempre temeu o desconhecido. Passando da escrita, história, matemática e finalmente a astronomia, sempre houveram temores associados àquilo que não se podia explicar. Com os cometas não foi diferente.

2.1 O Medo estampado no céu

Um dos principais motivos para temê-los era que eles simplesmente pareciam não seguir nenhuma regra, não possuíam similaridades com os demais corpos celestes, seja na trajetória, tamanho, periodicidade ou brilho [1]. Calculava-se o movimento dos demais corpos celestes, mas nada podia se dizer em relação aos cometas. Sua imprevisibilidade esteve sempre associado ao prenúncio de anormalidades.

Em relação aos outros astros, [1] complementa:

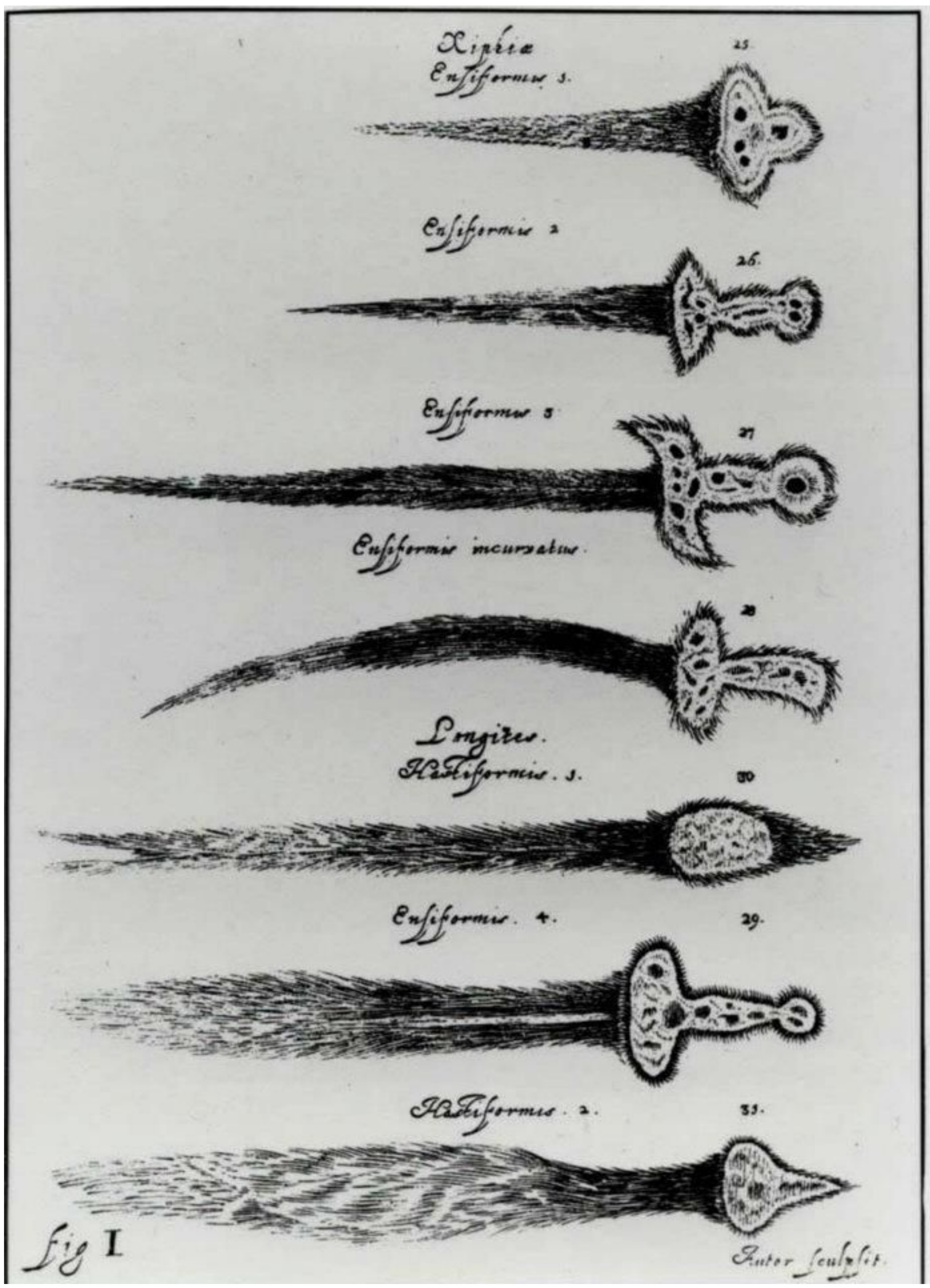
> O Sol é um círculo luminoso. A lua tem diferentes formas, mas pelo menos metade de seu contorno é um arco de círculo. Todos os outros corpos celestes são pontos luminosos. Porém o cometa é um círculo indistinto de luz, com um prolongamento de fraca luminosidade, também de contornos indistintos, ligeiramente curvado, semelhante a uma longa cauda ou a cabelos compridos. (p.14).

Uma análise da etimologia da palavra cometa revela que esta é uma latinização do grego $\kappa o\mu\eta\tau\eta\zeta$ (cometes, "cabelo longo"). Assim, a expressão utilizada na Grécia antiga para designar um cometa era $\alpha\sigma\tau\eta\rho$ $\kappa o\mu\eta\tau\eta\zeta$ (aster cometes), literalmente "estrela com cabelo longo"[4].

Na antiguidade grega, "uma das coisas que indicavam o luto era as mulheres soltarem os cabelos, desgrenhando-os, deixando-os cair nas costas, sinal que estavam abaladas demais para cuidar da aparência"[1]. Assim, muitos viam os cometas como uma mulher desesperada com cabelos esvoaçantes e isso, para eles, certamente só podia ser sinal de desgraça.

Não bastasse tal comparação, as pessoas associavam qualquer infortúnio aos cometas: ora imaginavam que a cauda tinha a forma de uma espada ou sabre, e que o círculo luminoso era uma cabeça decepada, ora listavam o ano em que o cometa aparecia e todas as coisas terríveis que haviam acontecido logo em seguida como forma de "prova"[1]. Logicamente essa "prova"não estabelecia nada, uma vez que infortúnios aconteciam o tempo todo, com ou sem os cometas.

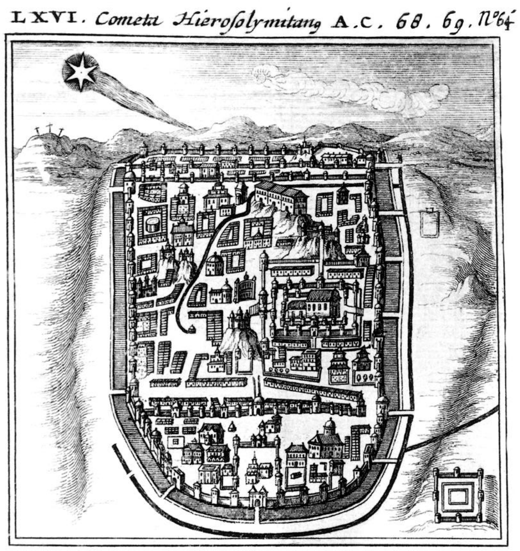
Figura 5: Formas dos Cometas.



Fonte: [6]

Exemplos disso são citados em [1], como o cometa do ano 44 a.C. que foi associado ao assassinato de Júlio César, ocorrido naquele mesmo ano, ou ainda o de 66 d.C. que posteriormente foi considerado uma previsão da queda de Jerusalém, tomada pelos romanos no ano 70 d.C. Por essas associações, durante a antiguidade e Idade Média os europeus não fizeram nenhuma observação científica dos cometas, estavam acovardados demais para isso [1].

Figura 6: Cometa Halley em sua aparição de 66 d.C sob Jerusalém.



Fonte: [7]

2.2 Quebra da Anarquia

Foi só em 1472, que um astrônomo alemão de nome Johann Muller (1436-1476), o Regiomontano, passou a encarar sem medo e com sagacidade a situação dos cometas. Conforme [1], ele observou o cometa em momentos diferentes, anotando sua posição em relação às estrelas e dessa forma, traçou uma linha imaginária no céu, indicando a trajetória do cometa.

Com base nas observações e postura analítica de Regiomantano, diversos estudos surgiram. De forma completamente independente, tanto o astrônomo italiano Girolamo Fracastoro (1483-1553) quanto o alemão Peter Apian (1501-1552) chegaram a uma mesma conclusão: “As caudas dos cometas sempre se estendiam em direção oposta ao sol ([1])”.

Essa explicação foi melhor complementada através de um modelo proposto em 1950 por Fred Lawrence Whipple (1906-2004), o modelo da bola de gelo sujo em que:

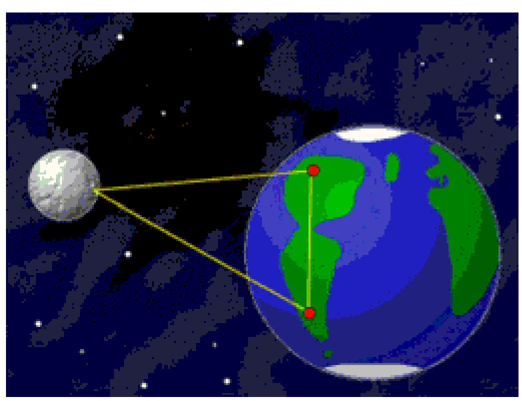
> Os cometas são feitos de uma mistura de gelo e poeira.[...] A medida que se aproximam do Sol, parte do gelo sublima, formando uma grande nuvem de gás e poeira ao redor do cometa, chamada coma. A parte sólida e gelada no interior é o núcleo. A pressão de radiação do Sol empurra as partículas de gás e a poeira da coma formando a cauda. Essa cauda sempre aponta na direção oposta à do Sol e pode estender-se até 1 UA de comprimento ([9]).

De volta à cronologia, cerca de três anos depois das divulgações de Fracastoro e Apian, em 1543, o astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) publicava a obra que viria a se tornar um marco na revolução científica: *De revolutionibus orbium coelestium* (Das revoluções das esferas celestes do original, em latim). Esta obra contrariava totalmente a filosofia aristotélica ao afirmar que os planetas não giravam ao redor da Terra, e sim do Sol.

Já em 1577, o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) observando o surgimento de mais um cometa, tentou mensurar a que distância este estava. Ele se valeu do princípio segundo o qual os objetos mais próximos parecem mudar de posição em relação aos mais distantes ao fundo, quando vistos de lugares diferentes. Essa diferença de posição denomina-se paralaxe (do grego $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma$r, alteração) [9].

O que Tycho fez foi anotar a posição do cometa em relação às estrelas em noites sucessivas para depois comparar esses dados com observações feitas por astrônomos em outras cidades [1]. Na figura 7 pode-se observar a triangulação da posição, com o astro assumindo um vértice e os astrônomos os outros.

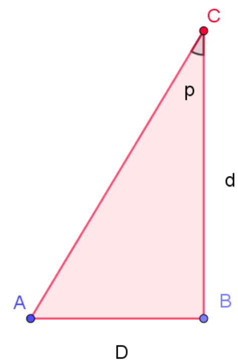
Figura 7: Medição da distância de astros.



Fonte: [13]

Assim, a modelagem envolvida era relativamente simples:

Figura 8: Modelagem da distância.



Sendo:

D : Distância entre as Cidades A e B;

d : Distância da cidade B ao astro;

p : Paralaxe.

O cálculo realizado era,

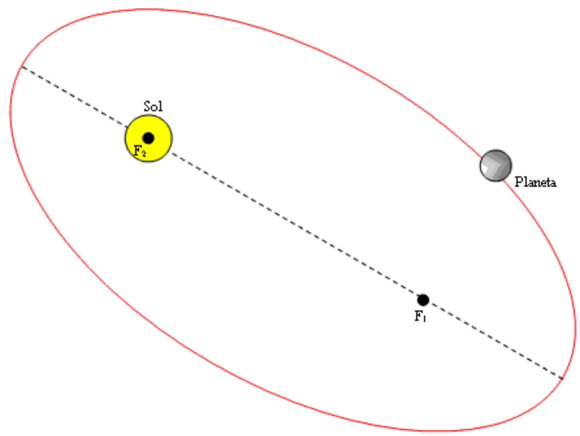
$$tg(p) = \frac{D}{d} \longrightarrow d = \frac{D}{tg(p)}.$$

No entanto, Tycho "não conseguiu achar nenhuma paralaxe e concluiu que o cometa deveria estar a uma distância de ao menos quatro vezes maior que a lua [1]".

Então, em 1609, um astrônomo alemão, Johannes Kepler (1571-1630), assistente de Tycho nos últimos anos de vida deste, demonstrou que os planetas giravam ao redor do sol em órbitas elípticas, ficando o sol em um dos focos. Com isso, formulou suas três leis, de grande importância para a astronomia geral:

1. **Lei das Órbitas (1609):** A órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol em um dos focos.

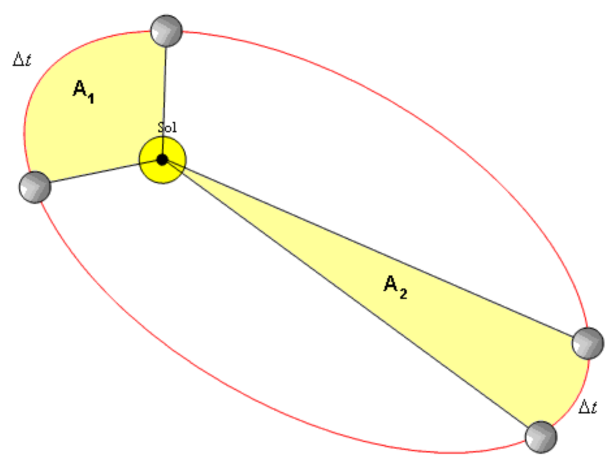
Figura 9: 1ª Lei de Kepler.



Fonte: Halliday (2008)

2. **Lei da áreas (1609):** O segmento de reta que une o planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais.

Figura 10: 2ª Lei de Kepler.



Fonte: Halliday (2008)

3. **Lei harmônica (1618):** O quadrado do período orbital dos planetas é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol. Sendo P o período sideral do planeta (uma revolução completa em torno do sol), a o semi-eixo maior da órbita, que é igual à distância média do planeta ao Sol, e K uma constante, podemos expressar a 3ª lei como:

$$P^2 = Ka^3. \quad (1)$$

Surgiu então a seguinte questão: Os cometas se movem ao redor do Sol como os planetas? E, se isso de fato se dá, como são suas órbitas? Não parecia haver dúvidas que as órbitas eram muito diferentes das dos planetas [1].

Com a construção do telescópio em 1609, Galileu Galilei (1564-1642) revolucionou as observações celestes e, em pouco tempo, todos os astrônomos da Europa já tinham o seu [1]. As observações mais precisas trouxeram discrepâncias acerca do comportamento anárquico dos cometas, tendo de um lado cientistas, incluindo Kepler, que acreditavam no movimento em linha reta dos cometas, e do outro, cientistas como Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) que acreditava que o cometa se aproximava de forma quase retilínea, mas que se curvava na aproximação do Sol.

Em suma, a órbita descrevia não um I, mas sim um U, estando o Sol dentro desse U [1]. É a curva conhecida como parábola. Fosse como fosse, ninguém ainda sabia de onde os cometas vinham, para onde iriam ou mesmo se retornavam. Era um mistério.

Parte desse mistério começou a ser solucionado em 1687, quando a obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (do latim, Princípios Matemáticos da Filosofia Natural) foi publicada pelo cientista inglês Isaac Newton (1642-1727). “Pela primeira vez os astrônomos conheciam as regras que definiam, com bastante previsão, as trajetórias que os corpos celestes tem que seguir quando se aproximam de outros corpos ([1], p. 31).

O astrônomo inglês, Edmund Halley (1656-1742), observou um cometa brilhante em 1682 e tentou calcular sua órbita. Era um trabalho exaustivo e para garantir a precisão de seus dados, Halley recolheu todos os dados de observações que teve acesso e trabalhou nisso por muitos anos. Mas seu trabalho duro foi recompensado ao ter notado um padrão que passara despercebido:

> Halley verificou que o cometa de 1607, que tinha sido cuidadosamente observado por Kepler, havia percorrido uma trajetória semelhante à do cometa de 1682 [...] Percebeu também que o cometa de 1531, observado por Fracastoro e Apiam também tivera uma trajetória semelhante, o mesmo ocorrendo com o cometa de 1456, observado por Regiomontano ([1], p.32).

Ele então conseguiu constatar que entre todas essas datas havia um intervalo de 75 a 76 anos e que talvez os quatro cometas observados fossem apenas um, com uma órbita elíptica tão alongada a ponto de ser necessário todo esse tempo para que ele reaparecesse. O resultado era tão surpreendente que, de acordo com [1], ele hesitou em publicá-lo por muito tempo, só o fazendo quando havia terminado todos os cálculos e afirmado que o cometa de 1682 deveria retornar em 1758.

Assim o comportamento dito imprevisível por milênios começava a ser desvendado. Havia um padrão. Mas novas questões surgiam na contramão: Como esse padrão foi calculado? Até que ponto esses cálculos estavam corretos? E em que poderiam ser úteis? Essas e outras perguntas serão melhor analisadas nos próximos capítulos.

3 Números em todo lugar

Kepler era um empiricista. Genial, mas da forma que escreveu suas leis, não havia respaldo teórico algum. Ele explicava como os planetas se moviam, mas não explicava porque se moviam assim ([9], 2014). Já Halley colocou extremo esforço em suas observações e cálculos e encontrou um padrão. Coube a Newton explicar as propriedades da força fundamental dominando os movimentos dos corpos astronômicos: a gravidade.

Em sua obra, Principia Mathematica, Newton havia generalizado, através do empirismo das Leis de Kepler, que as únicas órbitas possíveis para um corpo interagindo gravitacionalmente com outro são as secções cônicas: círculo, elipse, parábola ou hipérbole [9]. E analisando a energia do sistema, obtida pelo cálculo da distância entre ele e o Sol e sua velocidade, pode-se descobrir qual o tipo de órbita [1].

Para entendermos melhor esses conceitos, vamos começar com as definições das cônicas.

3.1 Cônicas

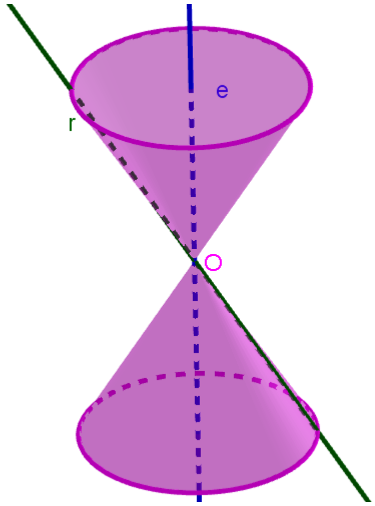
3.1.1 Seções Cônicas

Durante esse trabalho, várias definições, proposições, teoremas e corolários se farão necessárias a um bom entendimento da natureza dos cometas. Conforme teorizado por Newton, as trajetórias destes deveriam se assemelhar às entidades aqui explícitas e assim, por [12] temos que:

Definição 1. *Sejam duas retas e, r concorrentes na origem, não perpendiculares. Tomando e fixa e fazendo r descrever uma volta completa (2π) em torno de e (mantido o ângulo entre elas), essa iria gerar uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O.*

A reta r é chamada *geratriz* da superfície cônica e a reta e, *eixo da superfície.*

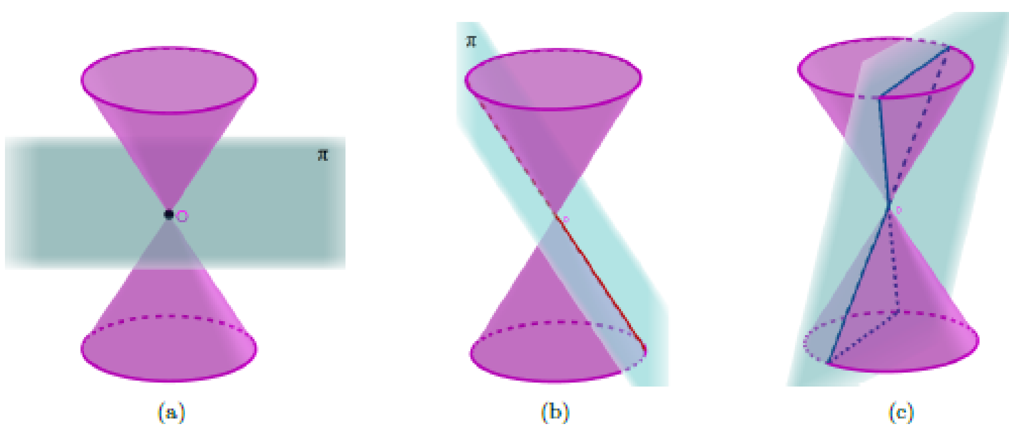
Figura 11: Superfície Cônica Circular.



Quando a superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer, a seção cônica resultante poderá ser dividida em dois grupos:

1. **Degenerada:** Quando o Plano π passa pelo vértice O. Nesse caso serão obtidos
   (a) um ponto se π só tem o ponto O em comum com a superfície;
   (b) uma reta se π tangencia a superfície;
   (c) duas retas se π forma com o eixo um ângulo menor do que este faz com a geratriz.

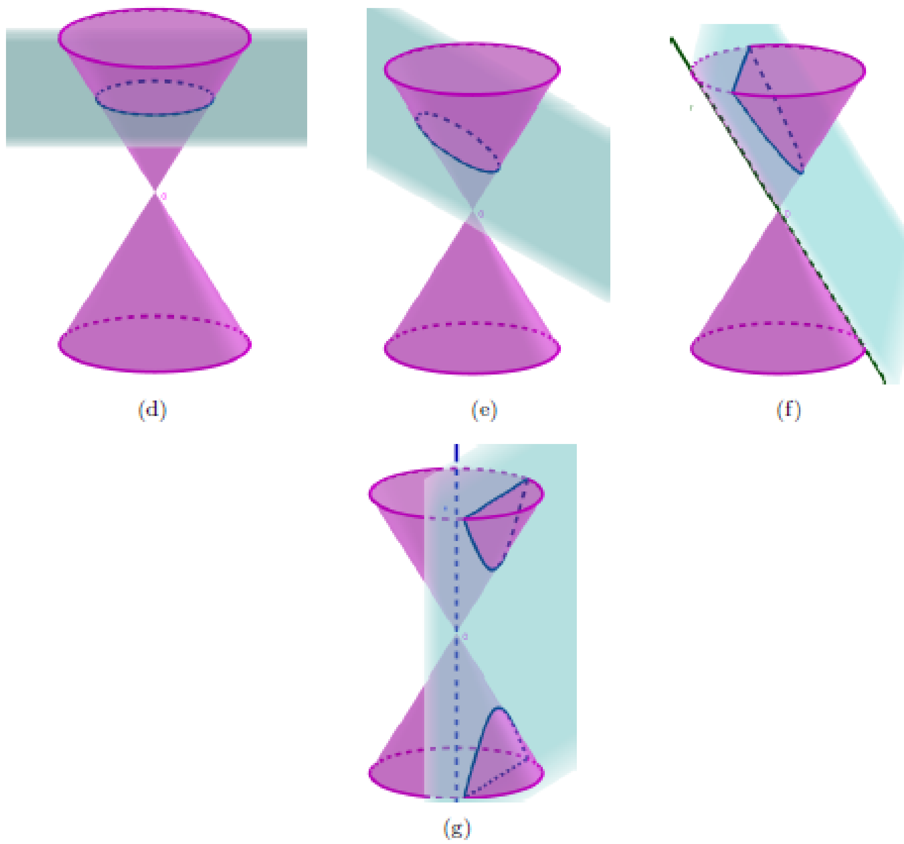
Figura 12: Seção Cônica Degenerada.



2. **Não-Degenerada:** Quando o Plano π não passa pelo vértice O. Nesse caso serão obtidos:
   (d) uma circunferência se π for perpendicular ao eixo e da superfície;
   (e) uma elipse se π for oblíquo ao eixo e, cortando apenas uma das folhas da

superfície;
(f) uma parábola se π for paralelo à geratriz da superfície;
(g) uma hipérbole se π for paralelo ao eixo e.

Figura 13: Seção Cônica Não-Degenerada.

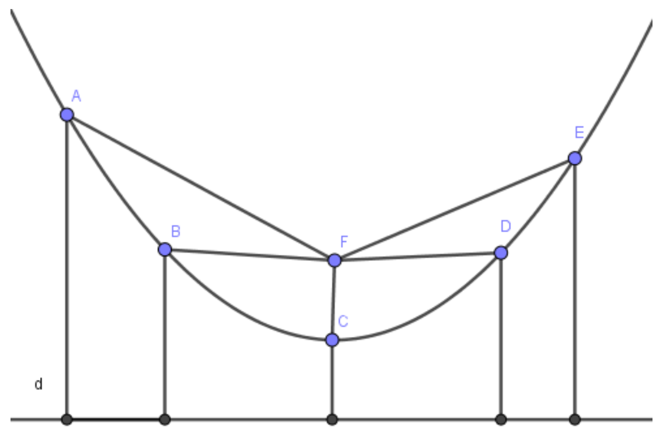


Dessa forma, estamos interessados nas seções cônicas não-degeneradas (exceto a circunferência), como veremos a seguir.

3.1.2 Parábola

Definição 2 (Parábola)**.** *Consideremos em um plano uma reta d e um ponto F não pertencente a d. A Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de F e d.*

Figura 14: A distância de F aos pontos A, B, C, D e E é a mesma destes à reta d

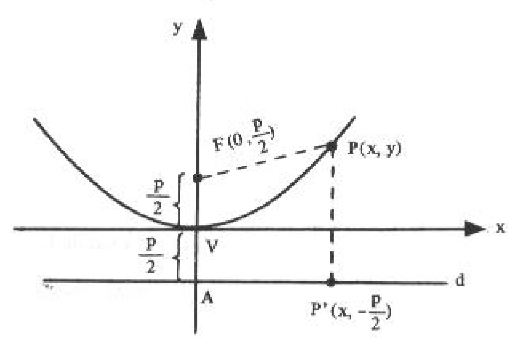


Elementos

1. *Foco:* É o ponto F.
2. *Diretriz:* É a reta d.
3. *Eixo:* É a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.
4. *Vértice:* É o ponto de interseção da parábola com seu eixo.

Com base na definição e nos elementos, podemos agora deduzir a equação que representa a cônica. Para isso, teremos de referi-la no sistema de eixos cartesianos. Faremos o primeiro caso, em que o vértice da parábola se encontra na origem do sistema de coordenadas e seu eixo é o das ordenadas.

Figura 15: Parábola referida no eixo cartesiano



Fonte: [12]

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola (Figura 15) de foco $F\left(0, \frac{P}{2}\right)$.

Da definição de parábola, tem-se:

$$|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PP'}|.$$

Como $P'\left(x, \frac{-P}{2}\right)$, vem:

$$\left|\left(x-0, y-\frac{P}{2}\right)\right| = \left|\left(x-x, y+\frac{P}{2}\right)\right|.$$

ou:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{P}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{P}{2}\right)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e reorganizando os termos, teremos enfim:

$$x^2 = 2py. \tag{2}$$

A equação 2 é chamada *equação reduzida* da parábola e constitui a forma padrão desta cônica com o vértice na origem e o eixo no eixo dos y.

3.1.3 Elipse

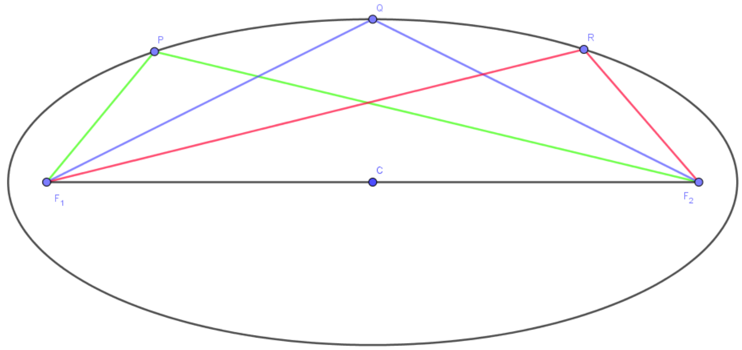
Definição 3 (Elipse)**.** *É o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.*

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos no plano, tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. E seja a um número real tal que $a > c$. O conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

é chamado de Elipse.

Figura 16: A soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante.

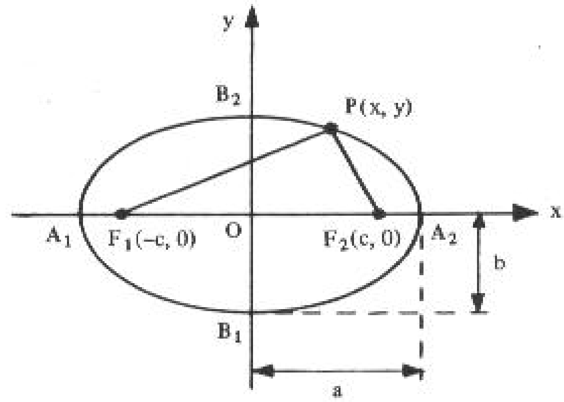


Elementos

1. *Focos:* São os pontos F_1 e F_2.
2. *Distância Focal:* É a distância $2c$ entre os focos.
3. *Centro:* É o ponto médio C do segmento F_1F_2.
4. *Eixo Maior:* É o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ que contém os focos e seus extremos pertencem à elipse.
5. *Eixo Menor:* É o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ que é perpendicular ao Eixo Maior passando pelo Centro.
6. *Vértices:* São os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.
7. *Excentricidade:* É o número e dado por $e = \frac{c}{a}$. Tendo em vista que $c < a$, tem-se que $0 < e < 1$.

Assim como a parábola, iremos deduzir sua equação referindo-a no eixo cartesiano. E novamente, por se tratar de casos análogos, faremos apenas o primeiro caso, em que o centro da elipse se encontra na origem do sistema de eixos e seu eixo maior está sobre o eixo das abscissas.

Figura 17: Elipse referida no eixo cartesiano



Fonte: [12]

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da elipse (Figura 17) de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Por definição, tem-se

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a,$$

ou:

$$|\overrightarrow{F_1P}|+|\overrightarrow{F_2P}|=2a,$$

ou em coordenadas:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos:

$$(x+c)^2+(y-0)^2+2\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+(x-c)^2+(y-0)^2=4a^2.$$

Isolando o termo com raiz em um membro,

$$(x+c)^2+(y-0)^2+(x-c)^2+(y-0)^2-4a^2=-2\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}.$$

E por fim, elevando novamente ambos os membros ao quadrado e agrupando os termos semelhantes, encontramos:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Mas como:

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow a^2 - c^2 = b^2,$$

Segue que

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

A Equação 3 é chamada de *equação reduzida* da elipse de centro na origem e o eixo maior no eixo dos x.

3.1.4 Hipérbole

Definição 4 (Hipérbole)**.** *É o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.*

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos no plano tais que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. E seja a um número real tal que $a < c$. O conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

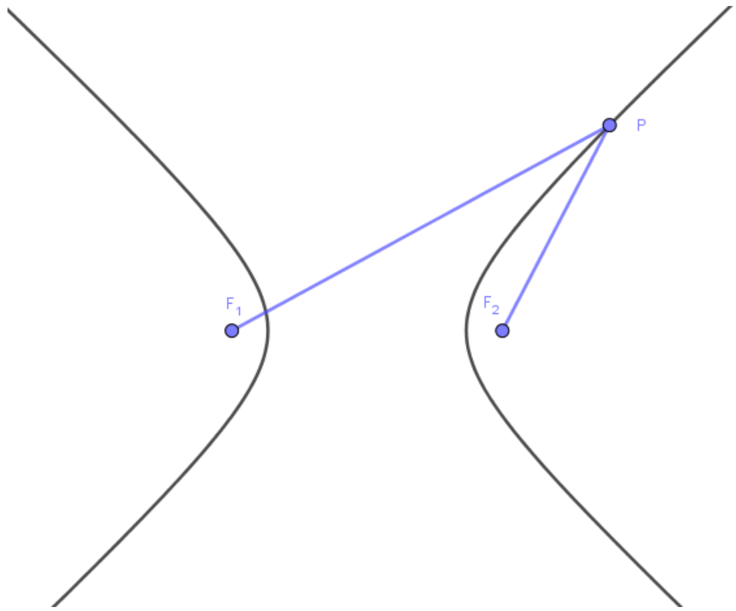
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

ou:

$$|\overrightarrow{F_1P} - \overrightarrow{F_2P}| = 2a.$$

É chamado de Hipérbole.

Figura 18: A diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante.

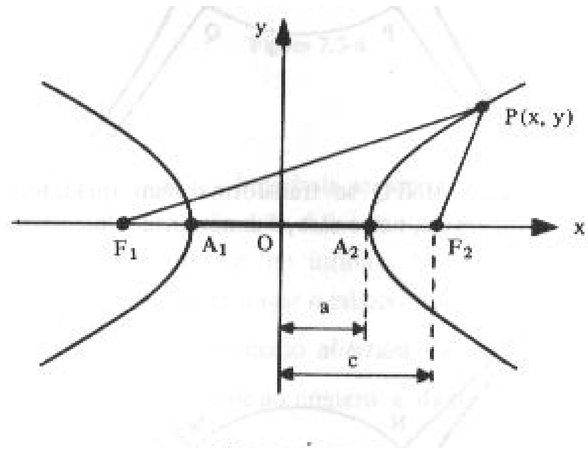


Elementos

1. *Focos:* São os pontos F_1 e F_2.
2. *Distância Focal:* É a distância $2c$ entre os focos.
3. *Centro:* É o ponto médio C do segmento F_1F_2.
4. *Vértices:* São os pontos A_1 e A_2.
5. *Eixo Real:* É o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.
6. *Eixo Imaginário:* É o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$.

Como nos casos anteriores, iremos deduzir sua equação referindo-a no eixo cartesiano. E novamente, por se tratar de casos análogos, faremos apenas o primeiro caso, em que o centro da Hipérbole se encontra na origem do sistema e seu eixo real está sobre o eixo das abscissas.

Figura 19: Hipérbole referida no eixo cartesiano



Fonte: [12]

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole (Figura 19) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$

Por definição, tem-se

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

ou em coordenadas:

$$|\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}| = 2a.$$

Através de procedimentos análogos aos utilizados na equação 3, e lembrando que $a^2 + b^2 = c^2$, chegaremos na equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

A equação 4 é chamada de *equação reduzida* da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo dos x.

3.1.5 Leis de Kepler e Newton

Foi considerando o movimento da Lua em torno da Terra e as duas primeiras leis de Kepler que Newton pôde explicar o movimento dos astros em torno do Sol e formular sua famosa Lei da Gravitação Universal:

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \tag{5}$$

onde G é uma constante de proporcionalidade que vale $6,67408 \times 10^{-11} NKg^2/m^2$.

Utilizando a Terceira Lei de Kepler, expressa pela equação 1 e a equação 5, Newton aferir a medida da constante K, obtendo:

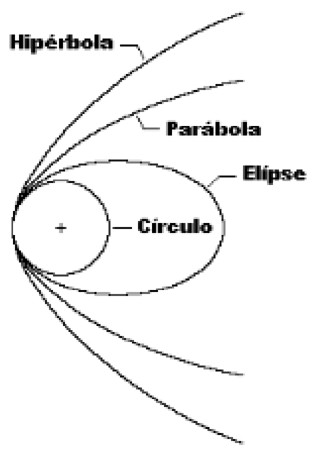
$$K = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \tag{6}$$

Daí, através de 5, 6 e de uma análise complexa da conservação da energia e do momento angular do sistema, Newton concluiu que:

1. Se a energia do sistema < 0: Órbita Elíptica
2. Se a energia do sistema $= 0$: Órbita Parabólica
3. Se a energia do sistema > 0: Órbita Hiperbólica

A figura 20 mostra as possíveis trajetórias que os astros realizam:

Figura 20: Tipos de órbitas



Fonte: [9]

Em seus estudos, Edmund Halley previu que a órbita do cometa homônimo é elíptica, demorando cerca de 75 anos para completar uma volta, conforme veremos a seguir.

4 O Cometa Halley

Edmund Halley faleceu em 1742, cerca de 16 anos antes da data prevista para o retorno do cometa que leva seu nome. Ele não pôde verificar se havia acertado ou não e, embora a previsão causasse euforia, ainda haviam muitos assuntos para se ocupar até o esperado ano [1].

Quando o ano de 1758 chegou, vários meses se passaram e não aparecia nenhum cometa. A trajetória dele, no entanto não era de uma precisão extrema, uma vez que houvera entre o cometa de 1531 e 1607 um intervalo de 76 anos e um mês, enquanto entre o de 1607 e o de 1682, transcorrera 75 anos e 11 meses. Logo ele tanto poderia chegar em 1759 ou até mesmo 1760 [1].

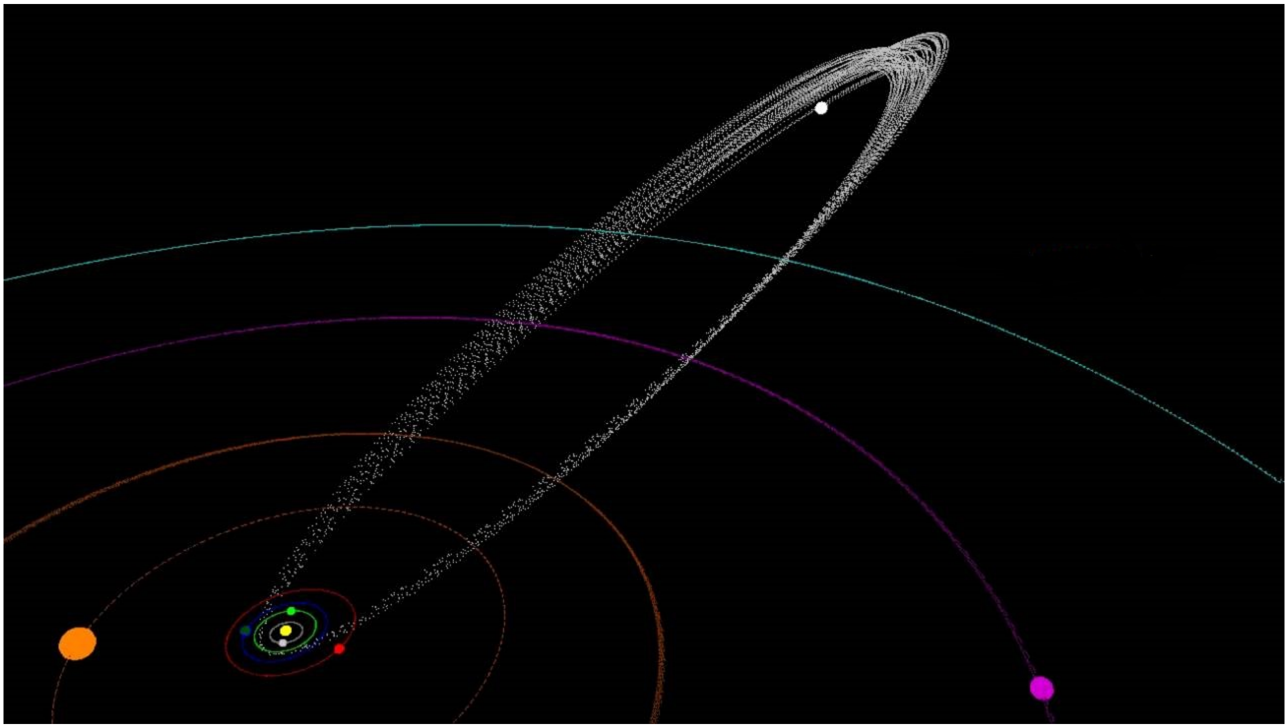
O motivo de tal irregularidade era primeiramente o fato de Halley não ter levado em conta a gravidade dos dois planetas supermassivos do sistema solar: Júpiter e Saturno. Outro fato foi que, mesmo alguns cientistas levando em conta os dados destes e refinando os dados de Halley, Urano e Netuno ainda eram desconhecidos, só dando as caras em 1781 e 1846, respectivamente.

Atualmente, de posse de todos os dados acerca do que se encontra na trajetória do cometa e conhecendo muito bem a sua trajetória elíptica, podemos prever onde ele está.

Sabemos que o cometa não possui uma órbita perfeitamente elíptica por conta dos planetas, que "poderiam exercer algum efeito gravitacional sobre ele, acelerando-o ou retardando-o"[1]. Para efeito de nossos cálculos, iremos supor que essa órbita é elíptica e usar alguns dados coletados ao longo dos séculos:

1. O Sol é um dos focos da Elipse (1ª Lei de Kepler);
2. A média de seus periélios (menor distância ao sol) é de $0,6$ U.A (Unidades Astronômicas);
3. A média de seus afélios (maior distância ao sol) é de 35 U.A (Unidades Astronômicas);
4. Uma Unidade Astronômica equivale a aproximadamente 150 milhões de quilômetros $(1,495978707 \times 10^{11} m)$.

Figura 21: Órbita do cometa Halley



Fonte: [10]

Assim, A_1 será nosso periélio, A_2 nosso afélio e F_1 o sol. Sabemos que

$$d(A_1, F_1) = 0,6 \times 1,495978707 \times 10^{11} = 8,97587 \times 10^{10} m$$

$$d(F_1, A_2) = 35 \times 1,495978707 \times 10^{11} = 5,23592 \times 10^{12} m$$

Portanto, o Eixo maior mede $5,32568 \times 10^{12}$. Tomando a igual a metade desse comprimento, isto é, $2,66284 \times 10^{12}$. As coordenadas dos vértices A_1 e A_2 são respectivamente:

$$A_1 = (-2,66284 \times 10^{12}, 0)$$

$$A_2 = (2,66284 \times 10^{12}, 0)$$

Utilizando a distância de qualquer um desses pontos, encontra-se as coordenadas do sol, a saber e consequentemente o valor c.

$$F_1 = (-2,57308 \times 10^{12}, 0)$$

De posse de a e c, podemos encontrar o b pela relação pitagórica

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O que nos dá que $b = 6,85548 \times 10^{11}$.

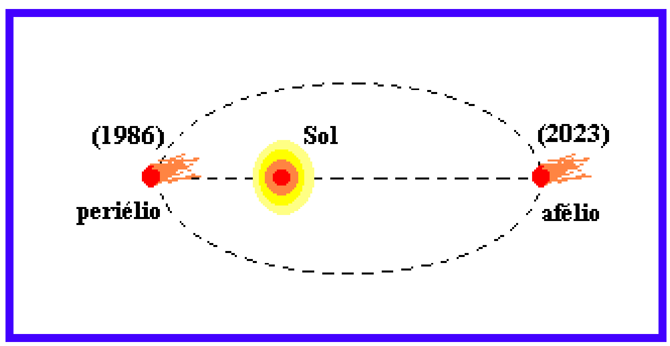
Assim, a fórmula geral da órbita elíptica, assumindo o centro dela na origem, será:

$$\frac{x^2}{(2,66284 \times 10^{12})^2} + \frac{y^2}{(6,85548 \times 10^{11})^2} = 1 \tag{7}$$

Além disso, o cálculo da excentricidade $\frac{c}{a}$ nos gera como resultado $0,966291$, um valor limítrofe entre uma elipse e uma parábola, o qual difere infimamente da excentricidade real: $0,96714$.

Assumindo sua trajetória de aproximadamente 75 anos e sua última visita em 1986, podemos estimar que passados 33 anos (2019), que este deve estar próximo do afélio (35 U.A). A figura 22 mostra seus pontos extremos e a data em que ocorreram:

Figura 22: Afélio e Periélio do cometa Halley



Fonte: [2]

5 Conclusões

Assim como Newton afirmou certa vez que só chegou onde chegou porque estava sobre ombros de gigantes, assim também foram nossos cálculos até aqui. Conseguimos verificar que a órbita do cometa é realmente elíptica e até mesmo conseguimos descrevê-la usando essa equação, comprovada por estudos anteriores.

Devido a essa quantidade de dados comprobatórios e a fama do cometa Halley, ele foi o protagonista desse trabalho. No entanto, é interessante para estudos futuros uma análise de outros cometas até então desconhecidos, além de planetas, estrelas e satélites.

Obviamente a modelagem ainda carece de muitos dados. Mesmo sendo aproximadamente uma elipse, temos de levar em conta a atração gravitacional dos planetas e outros astros que podem distorcer a trajetória dele, além do fato de que, por estar em um plano oblíquo em relação à Terra, seria necessário o uso de ferramentas de rotação e translação para compará-lo às orbitas do sistema solar.

Assim, nosso objetivo nesse trabalho foi simplesmente fazer uma revisão bibliográfica a fim de comprovar que existe uma modelagem matemática aceitável das órbitas de um cometa e esta é regida por uma cônica. A importância disso é o fato de se acrescentar o recurso notável da previsão nos registros astronômicos, estabelecendo padrões e entendendo melhor o universo que nos cerca.

Referências

[1] ASIMOV, I. *Guia para entender o cometa de Halley*. 2 ed. São Paulo: Editora Brasiliense, 1985.

[2] BOEKHOLT, T. C. N. *The Origin of Chaos in the Orbit of Comet 1P/Halley.* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Volume 461, Agosto de 2016.

[3] BOULOS, P; OLIVEIRA, I.C. *Geometria Analítica: um Tratamento Vetorial*. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1987, 385 p.

[4] DICIONÁRIO ETIMOLÓGICO. *Origem da Palavra COMETA*. Disponível em: <https://www.dicionarioetimologico.com.br/cometa>. Acesso em 15 dez. 2019.

[5] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física.* 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, vol 2, 2009.

[6] HEVELIUS, J. *Cometographia*. Disponível em: <https://solarsystem.nasa.gov/deepimpact/images/Hevelius_Comet_Types.jpg>. Acesso em 27 nov. 2019.

[7] JENKINS, R. M. *The Star of Bethlehem and the comet of AD 66*. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/full/2004JBAA..114..336J>. Acesso em 18 nov. 2019.

[8] KINAST, P. *Qual a diferença entre um meteoroide, meteoro, meteorito e um cometa?*. Disponível em: <https://www.oficinadanet.com.br/ciencia/25008-qual-a-diferenca-entre-um-meteoroide-meteoro-meteorito-e-um-cometa>. Acesso em 15 nov. 2019.

[9] OLIVEIRA, S. K.; SARAIVA, M. F. *Astronomia e Astrofísica*. 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. ISBN 8588325233.

[10] PIGNATALE, F. C. ET AL. *2D condensation model for the inner Solar Nebula: an enstatite-rich environment*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 457, 2016.

[11] SPACE TELESCOPE SCIENCE INSTITUTE *Dawn's Destination: The asteroid belt*. Disponível em: <https://history.amazingspace.org/news/archive/2007/03/ill-01.php>. Acesso em 21 nov. 2019.

[12] STEINBRUCH, A; WINTERLE, P. *Geometria analítica.* 2.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987 292 p.

[13] DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. *Determinação de Distâncias Astronômicas.* Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/dist/dist.htm>. Acesso em 15 nov. 2019.

[14] VON WEIZACKER, C.F. *Recent Progress in Astrophysics*. Artigo: American Astronomical Society, cedido pela NASA Astrophysics Data System. v.101, p. 249-254, 1945.